

9 TEOREMA DE PITÁGORAS

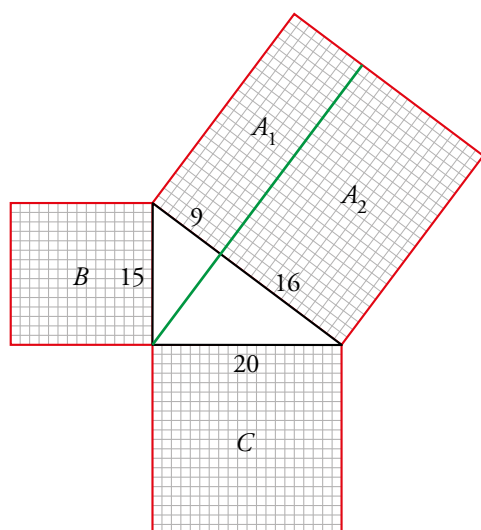
Página 205

Con lo que ya sabes, resuelve

Euclides, en el libro I de sus *Elementos*, probó que la perpendicular al lado mayor de un triángulo rectángulo, trazada desde el vértice del ángulo recto, divide al cuadrado grande en dos rectángulos, cada uno de los cuales ocupa la misma superficie que uno de los cuadrados pequeños:

$$B = A_1 \text{ y } C = A_2$$

- Compruébalo en este ejemplo, calculando las unidades cuadradas (u^2) que ocupan cada zona, y completa en tu cuaderno:



$$B = 15 \cdot 15 = 225 \text{ u}^2$$

$$A_1 = \dots \cdot 25 = \dots \text{ u}^2$$

$$C = \dots \cdot \dots = \dots \text{ u}^2$$

$$A_2 = 16 \cdot \dots = \dots \text{ u}^2$$

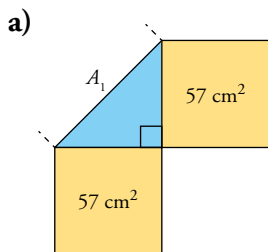
- $B = 15 \cdot 15 = 225 \text{ u}^2$
 $A_1 = 9 \cdot 25 = 225 \text{ u}^2$
 $C = 20 \cdot 20 = 400 \text{ u}^2$
 $A_2 = 16 \cdot 25 = 400 \text{ u}^2$

1 ► TEOREMA DE PITÁGORAS

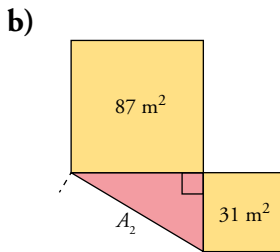
Página 207

Para fijar ideas

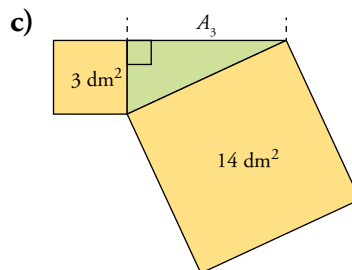
1 Dibuja estas figuras. Complétalas construyendo el cuadrado que falta en cada una y di cuál es su área.



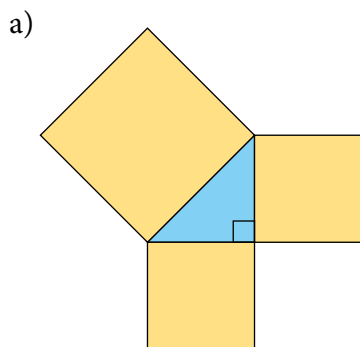
$$A_1 = 57 + 57 = \dots \text{ cm}^2$$



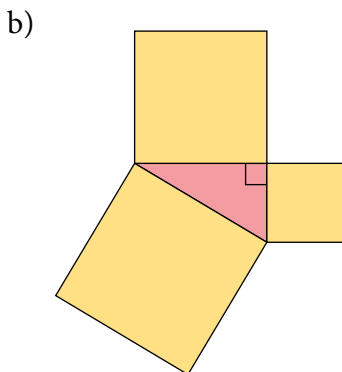
$$A_2 = 87 + \dots = \dots \text{ m}^2$$



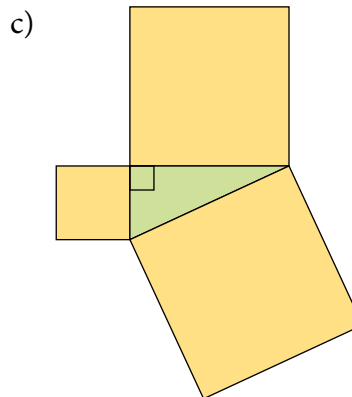
$$A_3 = 14 - \dots = \dots \text{ dm}^2$$



$$A_1 = 57 + 57 = 114 \text{ cm}^2$$



$$A_2 = 87 + 31 = 118 \text{ m}^2$$



$$A_3 = 14 - 3 = 11 \text{ dm}^2$$

2 Copia, completa y averigua en cada caso si el triángulo es rectángulo, obtusángulo o acutángulo.

a) 70 cm, 240 cm, 245 cm

$$\left. \begin{array}{l} 70^2 + 240^2 = 4\,900 + 57\,600 = 62\,500 \\ 245^2 = 60\,025 \end{array} \right\} \rightarrow 245^2 < 70^2 + 240^2 \rightarrow \text{El triángulo es acutángulo.}$$

b) 15 dm, 36 dm, 39 dm

$$\left. \begin{array}{l} 15^2 + 36^2 = 225 + 1\,296 = 1\,521 \\ 39^2 = 1\,521 \end{array} \right\} \rightarrow 39^2 = 15^2 + 36^2 \rightarrow \text{El triángulo es rectángulo.}$$

c) 18 m, 80 m, 83 m

$$\left. \begin{array}{l} 18^2 + 80^2 = 324 + 6\,400 = 6\,724 \\ 83^2 = 6\,889 \end{array} \right\} \rightarrow 83^2 > 18^2 + 80^2 \rightarrow \text{El triángulo es obtusángulo.}$$

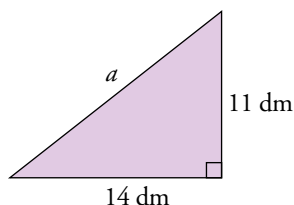
2 ▶ CÁLCULO DE UN LADO CONOCIENDO LOS OTROS DOS

Página 208

Para fijar ideas

1 Copia y completa para hallar el lado desconocido en cada uno de estos triángulos.

a)

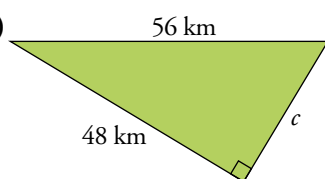


El lado desconocido es la hipotenusa, a .

$$a^2 = 11^2 + 14^2 \rightarrow a = \sqrt{11^2 + 14^2} = \sqrt{121 + 196} = \sqrt{317} = 17,8 \text{ dm}$$

La hipotenusa mide 18 dm, aproximadamente.

b)



El lado desconocido es el cateto, c .

$$56^2 = 48^2 + c^2 \rightarrow c^2 = 56^2 - 48^2 \rightarrow c = \sqrt{3136 - 2304} = 28,84 \text{ km}$$

El otro cateto mide 29 km, aproximadamente.

Para practicar

1 Halla la longitud del lado desconocido en estos triángulos rectángulos, donde a es la hipotenusa, aproximando cuando haga falta hasta dos cifras decimales.

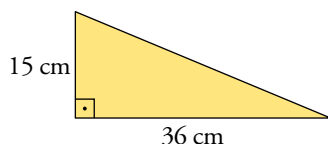
a) $c = 70 \text{ mm}$; $a = 74 \text{ mm}$

b) $b = 15 \text{ cm}$; $a = 25 \text{ cm}$

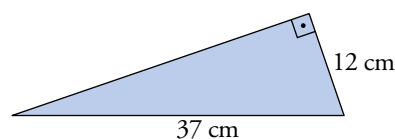
c) $b = 14 \text{ m}$; $c = 48 \text{ m}$

d) $b = 13 \text{ pulgadas}$; $c = 84 \text{ pulgadas}$

e)



f)



a) $b = 24 \text{ mm}$ b) $c = 20 \text{ cm}$ c) $a = 50 \text{ m}$ d) $a = 85 \text{ pulgadas}$ e) $a = 39 \text{ cm}$ f) $c = 35 \text{ cm}$

Página 209

Para fijar ideas

Copia, completa y comprueba, en cada caso, que llegas a la solución que se ofrece.

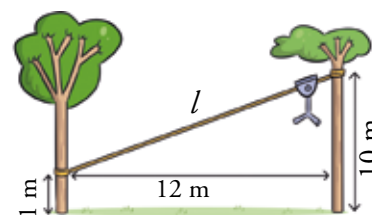
2 Se va a tender una tirolina entre dos árboles separados 12 m. El cable estará atado a 10 m de altura en un árbol y a 1 m de altura en el otro. ¿Cuál será la longitud del cable si, además de colocarlo en tensión, se necesita un 10% más para atarlo a los árboles?

Conociendo los catetos, hallamos la hipotenusa.

$$l^2 = 9^2 + 12^2 = 81 + 144 = 225 \rightarrow l = \sqrt{225} = 15 \text{ m}$$

La longitud del cable tenso es de 15 m.

Añadiendo un 10% $\rightarrow 15 \cdot 1,10 = 16,5 \text{ m}$

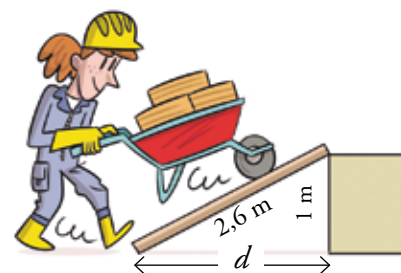


- 3** Queremos salvar un escalón de 1 m de altura para pasar con la carretilla. Disponemos de un tablón de 2,6 m. ¿A qué distancia del escalón empieza la rampa?

Conociendo la hipotenusa y el cateto vertical, calculamos el cateto horizontal.

$$d^2 = 2,6^2 - 1^2 = 6,76 - 1 = 5,76 \rightarrow d = \sqrt{5,76} = 2,4 \text{ m}$$

El pie del tablón estará situado a 2,4 m del escalón, o algo menos para que pueda apoyarse arriba.

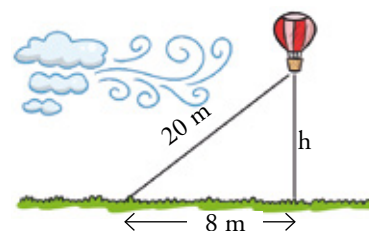


- 4** Un globo está amarrado al suelo con una cuerda de 20 m. El viento lo empuja, manteniendo tensa la cuerda, de forma que la vertical del globo se aleja 8 m del punto de amarre. ¿A qué altura se encuentra el globo?

Calculamos la longitud del cateto vertical.

$$h^2 = 20^2 - 8^2 = 400 - 64 = 336 \rightarrow h = \sqrt{336} = 18,3 \text{ m}$$

El globo se encuentra a 18,3 m de altura.



- 5** Una escalera cuyo pie está a 4 m de la pared se apoya en esta, alcanzando una altura de 7,5 m. ¿A qué distancia de la pared debe colocarse el pie para que llegue a una altura de 8 m?

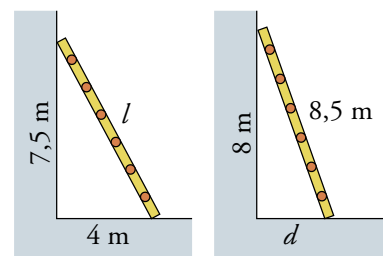
Calculamos primero la longitud de la escalera.

$$l^2 = 4^2 + 7,5^2 = 72,25 \rightarrow l = \sqrt{72,25} = 8,5 \text{ m}$$

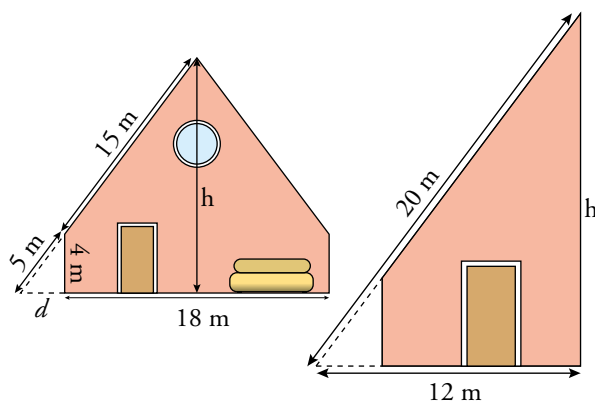
Ahora calculamos la distancia pedida, d .

$$d^2 = 8,5^2 - 8^2 = 72,25 - 64 = 8,25 \rightarrow d = \sqrt{8,25} = 2,9 \text{ m}$$

El pie de la escalera debe situarse a 2,9 m de la pared.



- 6** Álvaro ha tomado estas medidas para hallar la altura, h , de la pared de su buhardilla. Calcula d y, luego, h .



Calculamos primero la distancia d :

$$d^2 = 5^2 - 4^2 = 9 \rightarrow d = \sqrt{9} = 3 \text{ m}$$

Ahora calculamos la altura, h , sabiendo que es el cateto de un triángulo rectángulo cuya hipotenusa mide 20 m y el otro 12 m:

$$h^2 = 20^2 - 12^2 = 256 \rightarrow h = \sqrt{256} = 16 \text{ m}$$

La altura de la buhardilla es de 16 m.

3 ▶ APLICACIONES DEL TEOREMA DE PITÁGORAS

Página 210

Para fijar ideas

- 1 La diagonal de un rectángulo mide 89 cm, y uno de los lados, 80 cm. Calcula su área.**

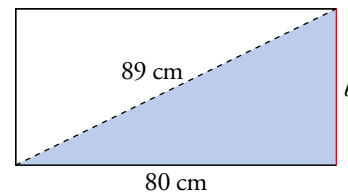
El área de un rectángulo de lados a y b es: $A = a \cdot b$

Empezamos por calcular el otro lado:

$$b = \sqrt{89^2 - 80^2} = \sqrt{1521} = 39$$

El lado corto mide 39 cm.

El área es: $A = 80 \cdot 39 = 3120 \text{ cm}^2$



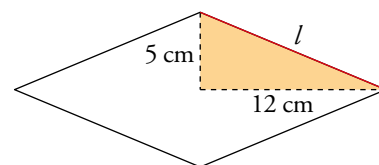
- 2 Las diagonales de un rombo miden 10 cm y 24 cm. Halla su perímetro.**

Comenzamos por calcular la longitud de un lado:

$$l = \sqrt{12^2 + 5^2} = \sqrt{169} = 13$$

Cada lado mide 13 cm.

El perímetro es: $P = 4 \cdot 13 = 52 \text{ cm}$



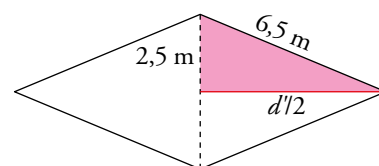
- 3 El lado de un rombo mide 6,5 m y una de sus diagonales, 5 m. Halla su área.**

El área de un rombo cuyas diagonales son d y d' es: $A = \frac{d \cdot d'}{2}$

Conocemos una diagonal. El teorema de Pitágoras nos permite calcular la otra:

$$\frac{d'}{2} = \sqrt{6,5^2 - 2,5^2} = 6 \text{ m}$$

La segunda diagonal mide, pues, $6 \cdot 2 = 12 \text{ m}$. Por tanto, $A = \frac{5 \cdot 12}{2} = 30 \text{ m}^2$.



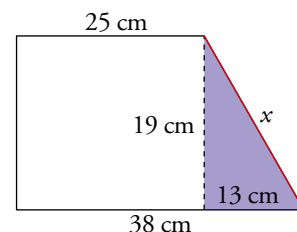
- 4 Las bases de un trapecio rectángulo miden 25 cm y 38 cm, y la altura, 19 cm. Halla su perímetro.**

Empezamos calculando la longitud del lado oblicuo:

$$x = \sqrt{13^2 + 19^2} = \sqrt{530} \approx 23,02$$

El lado oblicuo mide, aproximadamente: $x = 23 \text{ cm}$

El perímetro es: $P = 38 + 19 + 25 + 23 = 105 \text{ cm}$



- 5 Halla el área de un trapecio isósceles cuyas bases miden 30 cm y 48 cm, y el lado oblicuo, 41 cm.**

Recordemos que el área de un trapecio es: $A = \frac{(b + b') \cdot h}{2}$

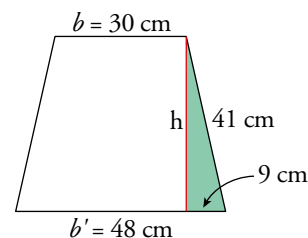
Hemos de empezar calculando su altura, h .

En el triángulo verde, el lado pequeño mide $(48 - 30) : 2 = 9 \text{ cm}$.

$$h = \sqrt{41^2 - 9^2} = \sqrt{1600} = 40 \text{ cm}$$

La altura del trapecio mide 40 cm.

$$A = \frac{(30 + 48) \cdot 40}{2} = 1560 \text{ cm}^2$$



Para fijar ideas

6 Calcula el área de un triángulo equilátero de lado 8 cm.

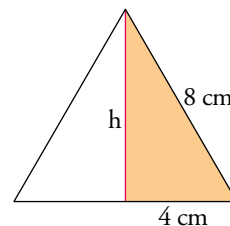
Empezamos calculando la altura:

$$h = \sqrt{8^2 - 4^2} = \sqrt{48} \approx 6,9$$

La altura mide 6,9 cm, aproximadamente.

El área es:

$$A = \frac{8 \cdot 6,9}{2} = 27,6 \text{ cm}^2$$



7 Calcula el área y el perímetro de un pentágono regular cuya apotema mide 16,2 cm, y el radio, 20 cm.

Primero calculamos el lado:

$$\frac{l}{2} = \sqrt{20^2 - 16,2^2} = \sqrt{137,56} \approx 11,7 \text{ cm}$$

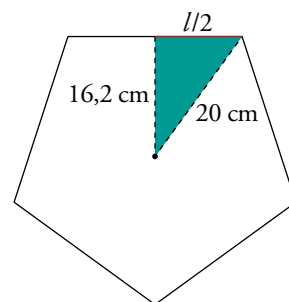
El lado del pentágono mide:

$$l = 11,7 \cdot 2 = 23,4 \text{ cm}$$

Por tanto, su perímetro es: $P = 23,4 \cdot 5 = 117 \text{ cm}$

Finalmente, calculamos el área.

$$A = \frac{\text{perímetro} \cdot \text{apotema}}{2} = \frac{117 \cdot 16,2}{2} = 947,7 \text{ cm}^2$$



8 Halla la longitud de una circunferencia en la que se ha trazado una cuerda de 6,6 cm a una distancia de 5,6 cm del centro. Calcula el área del círculo correspondiente.

Comenzamos calculando el radio.

En el triángulo rectángulo coloreado, el lado pequeño mide:

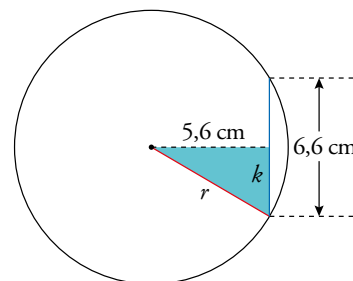
$$k = 6,6 : 2 = 3,3 \text{ cm}$$

Por tanto: $r = \sqrt{3,3^2 + 5,6^2} = \sqrt{42,25} = 6,5$

El radio mide 6,5 cm.

$$P = 2\pi r = 2 \cdot 3,14 \cdot 6,5 \approx 40,8 \text{ cm}$$

$$A = \pi r^2 = 3,14 \cdot 6,5^2 \approx 132,7 \text{ cm}^2$$



9 Una circunferencia de 8 cm de radio es cortada por una recta en dos puntos A y B que distan 8 cm entre sí. Calcula el área del segmento circular determinado por la cuerda \widehat{AB} .

El segmento circular, en rosa, es la diferencia entre el sector circular de arco \widehat{AB} y el triángulo OAB .

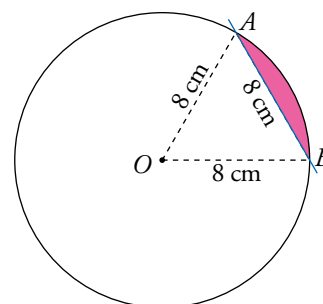
El triángulo OAB , equilátero, es el mismo cuya área hemos obtenido en el ejercicio 6 de esta página ($A_{\text{TRIÁNGULO}} = 27,6 \text{ cm}^2$).

Como el triángulo es equilátero, $\widehat{AOB} = 60^\circ$.

Por tanto, el área del sector es la sexta parte del área de todo el círculo:

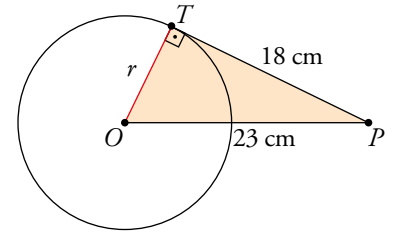
$$A_{\text{SECTOR}} = (\pi \cdot 8^2) : 6 = 33,5 \text{ cm}^2$$

Por tanto: $A_{\text{SEGMENTO CIRCULAR}} = 33,5 - 27,6 = 5,9 \text{ cm}^2$



Para fijar ideas

- 10** La distancia de un punto P al centro O de una circunferencia es $\overline{OP} = 23$ cm. Trazamos una tangente desde P a la circunferencia. El segmento tangente PT mide 18 cm. Halla el área del círculo.



La recta tangente es perpendicular al radio.

Por tanto, el triángulo PTO es rectángulo en T :

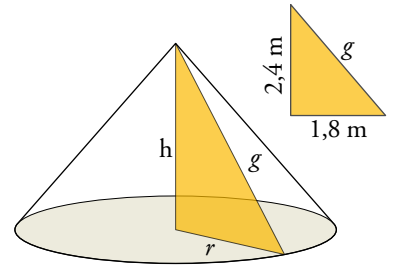
$$r^2 = \overline{OP}^2 - \overline{PT}^2 = 23^2 - 18^2 = 205$$

$$A_{\text{CÍRCULO}} = \pi r^2 = \pi \cdot 205 \approx 644 \text{ cm}^2$$

- 11** Calcula la generatriz, g , de un cono de 2,4 m de altura y 1,80 m de radio.

Una generatriz es la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos catetos son la altura y el correspondiente radio de la base. Así:

$$g = \sqrt{2,4^2 + 1,8^2} = \sqrt{9} = 3 \text{ m} = 3 \text{ m}$$



- 12** Halla la diagonal de un ortoedro de dimensiones 1,2 m; 1,6 m y 4,8 m.

Atendiendo al triángulo azul: $\overline{AC} = \sqrt{1,2^2 + 1,6^2} = 2$ m

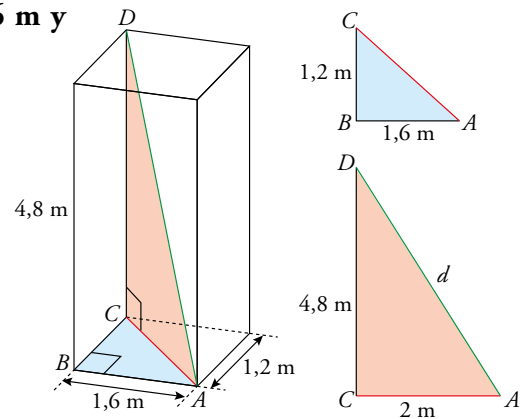
Atendiendo al triángulo rojo: $d = \sqrt{2^2 + 4,8^2} = 5,2$ m

La diagonal del ortoedro mide 5,2 m.

Observa que se puede hallar directamente:

$$d = \sqrt{1,2^2 + 1,6^2 + 4,8^2} = \sqrt{27,04} = 5,2 \text{ m}$$

En general, en un ortoedro de dimensiones $a \times b \times c$ la diagonal es: $d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$



- 13** Calcula la altura, h , de una pirámide cuadrangular regular cuya base es un cuadrado de 30 m de lado y cuya cara lateral tiene un área de 255 m².

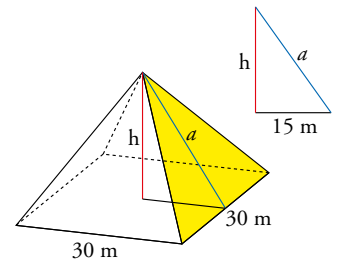
Primero hallamos la altura, a , de la cara lateral.

$$255 = \frac{30 \cdot a}{2} \rightarrow 510 = 30a \rightarrow a = 17 \text{ m}$$

La altura de la cara lateral es la hipotenusa del triángulo que aparece a la derecha:

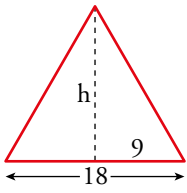
$$h = \sqrt{17^2 - 15^2} = \sqrt{64} = 8 \text{ m}$$

La pirámide tiene 8 m de altura.



Para practicar

- 1 Halla el área de un triángulo equilátero de 54 cm de perímetro.

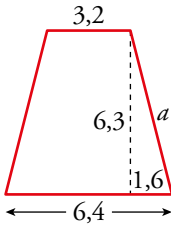


$$\text{Lado} = \frac{54}{3} = 18 \text{ cm}$$

$$h = \sqrt{18^2 - 9^2} = \sqrt{243} \approx 15,59 \text{ cm}$$

$$A = \frac{18 \cdot 15,59}{2} = 140,31 \text{ cm}^2$$

- 2 Halla el área y el perímetro de un trapezio isósceles cuyas bases miden 3,2 m y 6,4 m, y su altura, 6,3 m.

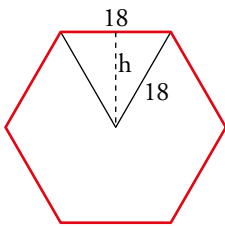


$$a = \sqrt{6,3^2 + 1,6^2} = \sqrt{42,25} = 6,5 \text{ m}$$

$$P = 3,2 + 2 \cdot 6,5 + 6,4 = 22,6 \text{ m}$$

$$A = \frac{6,4 + 3,2}{2} \cdot 6,3 = 30,24 \text{ m}^2$$

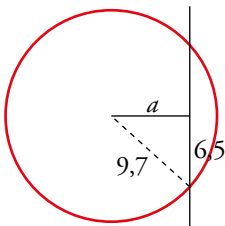
- 3 Calcula el área de un hexágono regular de 18 cm de lado. (Recuerda que en un hexágono regular, el lado mide igual que el radio).



$$h = \sqrt{18^2 - 9^2} = \sqrt{243} \approx 15,6 \text{ cm}$$

$$A = \frac{18 \cdot 6 \cdot 15,6}{2} = 842,4 \text{ cm}^2$$

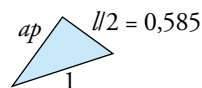
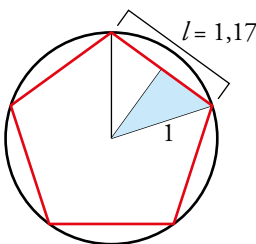
- 4 En una circunferencia de radio 9,7 m, se traza una cuerda de 13 m. ¿A qué distancia de la cuerda se encuentra el centro de la circunferencia?



$$a = \sqrt{9,7^2 - 6,5^2} = \sqrt{51,84} = 7,2 \text{ m}$$

Se encuentra a una distancia de 7,2 m.

- 5 Un pentágono regular está inscrito en una circunferencia de radio 1 m. Su perímetro es 5,85 m. Calcula su área.



$$l = 5,85 : 5 = 1,17 \text{ m}$$

$$ap = \sqrt{1^2 - 0,585^2} = 0,81$$

$$A = \frac{5,85 \cdot 0,81}{2} = 2,37 \text{ m}^2$$

- 6** Halla la longitud de la diagonal de un ortoedro cuyas dimensiones son 8 dm, 6 dm y 14 dm.

La figura es como la del ejercicio 12 de «Para fijar ideas», pero cambiando las medidas:

$$\overline{AB} = 8 \text{ dm}, \overline{BC} = 6 \text{ dm} \text{ y } \overline{CD} = 14 \text{ dm}.$$

$$\overline{AC} = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10 \text{ dm}$$

$$d = \sqrt{10^2 + 14^2} = 17,2 \text{ dm}$$

La diagonal del ortoedro mide 17,2 dm.

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

Página 213

¿DOMINAS LO BÁSICO?

Teorema de Pitágoras en figuras planas

1  Di si cada uno de los siguientes triángulos es rectángulo, acutángulo u obtusángulo.

a) 15 cm, 10 cm, 11 cm

b) 35 m, 12 m, 37 m

c) 23 dm, 28 dm, 21 dm

d) 14 m, 48 m, 50 m

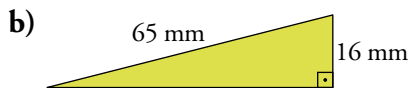
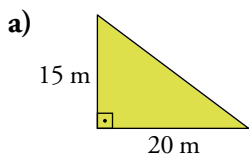
a) Obtusángulo.

b) Rectángulo.

c) Acutángulo.


d) Rectángulo.

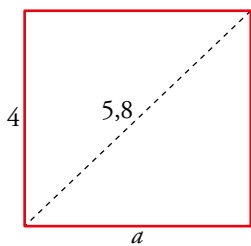
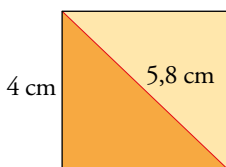
2  Calcula el lado desconocido en cada triángulo rectángulo:



a) $l = \sqrt{15^2 + 20^2} = \sqrt{625} = 25 \text{ m}$


b) $l = \sqrt{65^2 - 16^2} = \sqrt{3969} = 63 \text{ mm}$

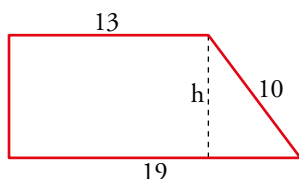
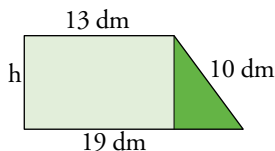
3  Calcula el perímetro de un rectángulo cuya diagonal mide 5,8 cm, y uno de los lados, 4 cm.



$a = \sqrt{5,8^2 - 4^2} = \sqrt{17,64} = 4,2 \rightarrow P = 16,4 \text{ cm}$

El perímetro es de 16,4 cm.

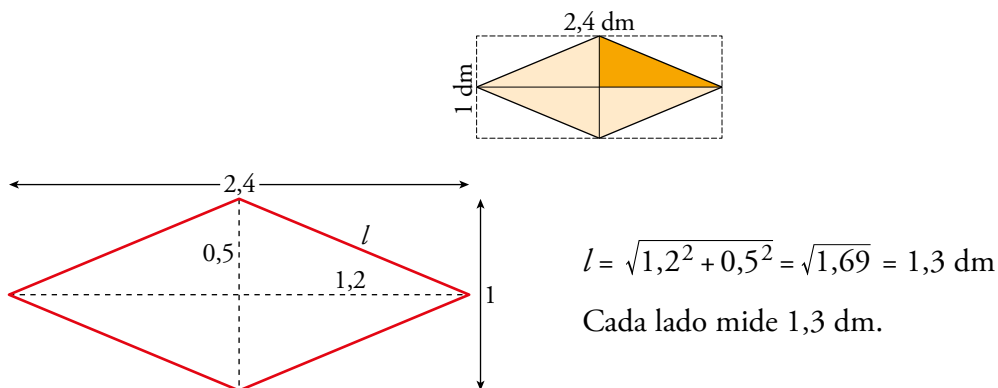
4  Los lados paralelos de un trapezio rectángulo miden 13 dm y 19 dm, y el lado oblicuo mide 10 dm. Calcula la altura.



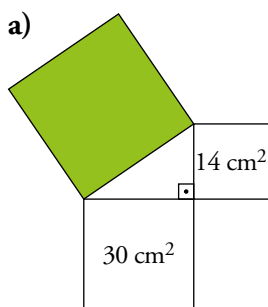
$h = \sqrt{10^2 - 6^2} = \sqrt{64} = 8 \text{ dm}$

El trapezio tiene una altura de 8 dm.

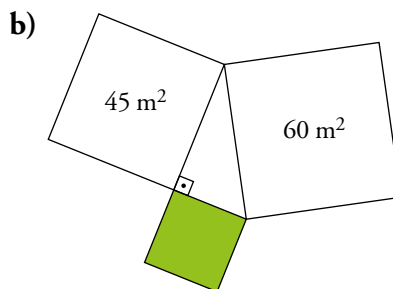
- 5  Calcula la medida del lado de un rombo cuyas diagonales miden 1 dm y 2,4 dm.



- 6  Calcula el área del cuadrado verde en cada uno de los siguientes casos:

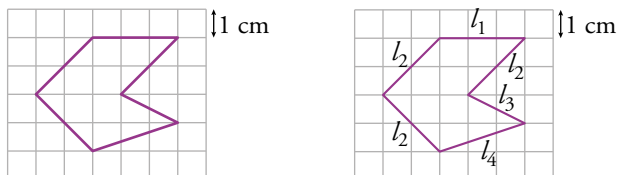


a) $A = 30 + 14 = 44 \text{ cm}^2$



b) $A = 60 - 45 = 15 \text{ m}^2$

- 7  Halla el perímetro de la siguiente figura:




$l_1 = 3 \text{ cm}$

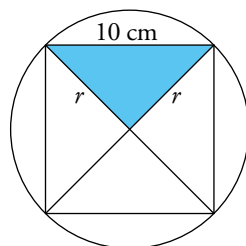
$l_2 = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2,8 \text{ cm}$

$l_3 = \sqrt{1^2 + 2^2} = 2,2 \text{ cm}$

$l_4 = \sqrt{1^2 + 3^2} = 3,2 \text{ cm}$

$P = l_1 + 3 \cdot l_2 + l_3 + l_4 = 16,8 \text{ cm}$

- 8  Calcula el radio de la circunferencia circunscrita a un cuadrado de 10 cm de lado.



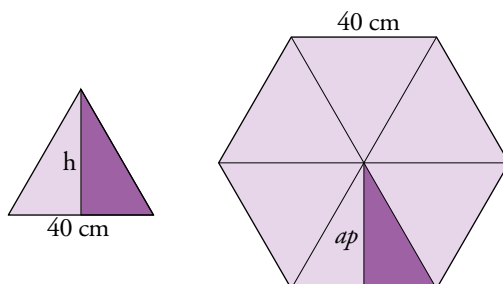
Las diagonales del cuadrado son perpendiculares.

Por tanto, el triángulo coloreado es rectángulo y tiene los catetos iguales.

$$r^2 + r^2 = 10^2 \rightarrow 2r^2 = 100 \rightarrow r^2 = 50$$

$$r = \sqrt{50} = 7,07 \text{ cm}$$


- 9  Halla la altura, h , del triángulo y la apotema, ap , del hexágono.

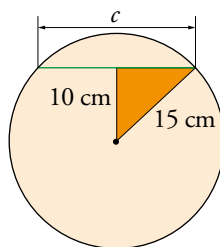


La apotema del hexágono y la altura del triángulo miden lo mismo, ya que ambos triángulos son equiláteros de lado 40 cm.

Aplicamos el teorema de Pitágoras:


$$h = ap = \sqrt{40^2 - 20^2} = \sqrt{1200} \approx 34,64 \text{ cm}$$

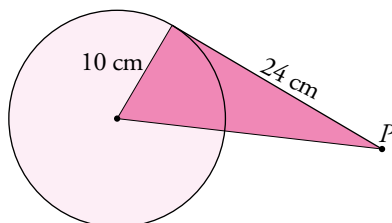
- 10  Una recta pasa a 10 cm del centro de una circunferencia de 15 cm de radio. Halla, aproximando hasta las décimas, la longitud de la cuerda que se genera.



$$\frac{c}{2} = \sqrt{15^2 - 10^2} = 11,2 \text{ cm}$$

$$c = 2 \cdot 11,2 = 22,4 \text{ cm}$$

- 11  Desde un punto P exterior a una circunferencia de radio 10 m se traza un segmento tangente de 24 m. ¿A qué distancia está P del centro de la circunferencia?



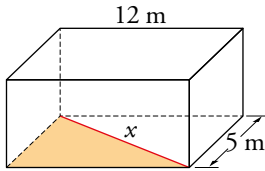
$$d = \sqrt{24^2 + 10^2} = 26 \text{ cm}$$

Está a una distancia de 26 cm.

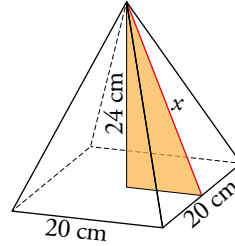
Teorema de Pitágoras en figuras de tres dimensiones

12  Calcula, con una cifra decimal, la longitud de x en cada uno de los siguientes cuerpos geométricos.

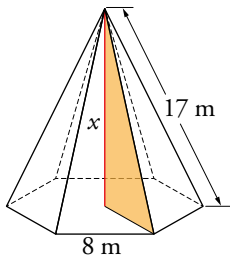
a)



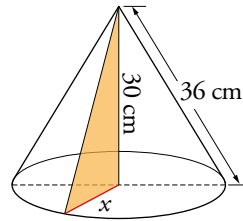
b)



c)



d)




$$a) x^2 = 5^2 + 12^2 \rightarrow x = \sqrt{169} = 13 \text{ m}$$

$$b) x^2 = 24^2 + 10^2 \rightarrow x = \sqrt{676} = 26 \text{ cm}$$

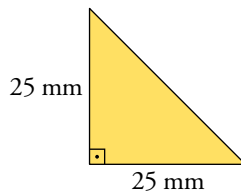
$$c) x^2 = 17^2 - 8^2 \rightarrow x = \sqrt{225} = 15 \text{ m}$$

$$d) x^2 = 36^2 - 30^2 \rightarrow x = \sqrt{396} = 19,96 \text{ cm}$$

Áreas y perímetros utilizando el teorema de Pitágoras

13  Halla el área y el perímetro en cada una de estas figuras. Para ello, deberás calcular previamente la longitud desconocida de alguno de sus elementos.

a)

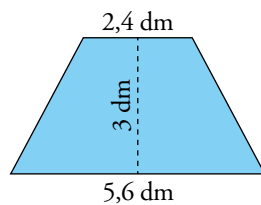


$$A = \frac{25 \cdot 25}{2} = \frac{625}{2} = 312,5 \text{ mm}^2$$

$$\text{Hipotenusa} = \sqrt{25^2 + 25^2} = \sqrt{1250} = 35,4 \text{ mm}$$

$$P = 25 + 25 + 35,4 = 85,4 \text{ mm}$$

b)

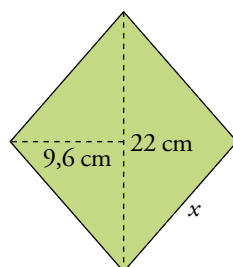


$$A = \frac{(2,4 + 5,6) \cdot 3}{2} = 12 \text{ dm}^2$$

$$\text{Lado oblicuo} = \sqrt{3^2 + \left(\frac{5,6 - 2,4}{2}\right)^2} = 3,4 \text{ dm}$$

$$P = 2,4 + 5,6 + 2 \cdot 3,4 = 14,8 \text{ dm}$$

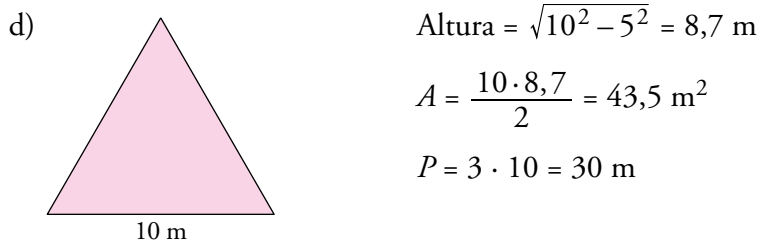
c)



$$A = \frac{(2 \cdot 9,6) \cdot 22}{2} = 211,2 \text{ cm}^2$$

$$\text{Lado} = x = \sqrt{11^2 + 9,6^2} = 14,6 \text{ cm}$$

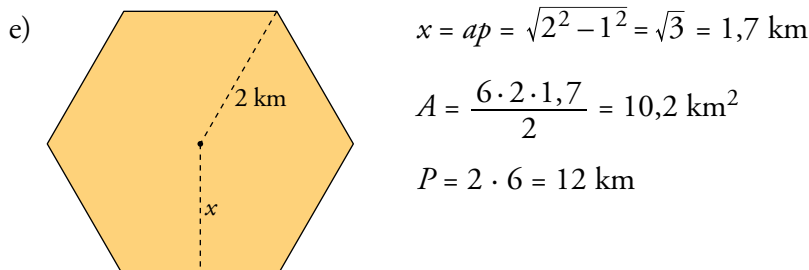
$$P = 4 \cdot 14,6 = 58,4 \text{ cm}$$



$$\text{Altura} = \sqrt{10^2 - 5^2} = 8,7 \text{ m}$$

$$A = \frac{10 \cdot 8,7}{2} = 43,5 \text{ m}^2$$

$$P = 3 \cdot 10 = 30 \text{ m}$$



$$x = ap = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3} = 1,7 \text{ km}$$

$$A = \frac{6 \cdot 2 \cdot 1,7}{2} = 10,2 \text{ km}^2$$

$$P = 2 \cdot 6 = 12 \text{ km}$$

ENTRÉNATE Y PRACTICA

14  Di si cada uno de los siguientes triángulos es rectángulo, acutángulo u obtusángulo.

a) 15 km, 20 km, 25 km

b) 17 millas, 10 millas, 8 millas

c) 35 mm, 42 mm, 35 mm


d) 18 cm, 80 cm, 82 cm

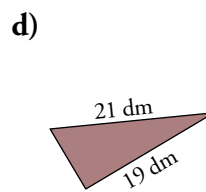
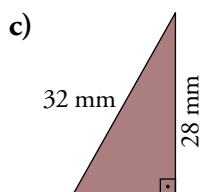
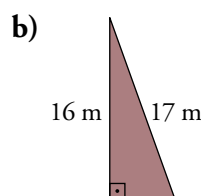
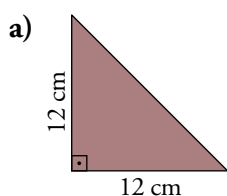
a) Rectángulo, ya que: $25^2 = 625 = 15^2 + 20^2$

b) Obtusángulo, ya que: $17^2 = 289 > 10^2 + 8^2$

c) Acutángulo, ya que: $42^2 = 1764 < 2450 = 35^2 + 35^2$

d) Rectángulo, ya que: $82^2 = 6724 = 80^2 + 18^2$

15  Calcula el lado desconocido en cada triángulo aproximando hasta las décimas.




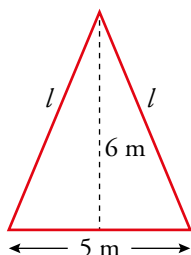
a) $l = \sqrt{12^2 + 12^2} = \sqrt{2 \cdot 12^2} = 12\sqrt{2} \text{ cm} \approx 17 \text{ cm}$

b) $l = \sqrt{17^2 - 16^2} = \sqrt{33} \text{ m} \approx 5,7 \text{ m}$


c) $l = \sqrt{32^2 - 28^2} = \sqrt{240} \text{ mm} \approx 15,5 \text{ mm}$

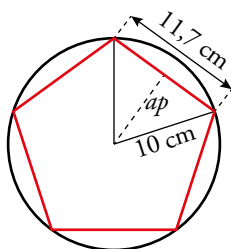
d) $l = \sqrt{21^2 - 19^2} = \sqrt{80} = 8,9 \text{ dm}$

- 16**  Calcula los lados iguales de un triángulo isósceles sabiendo que el lado desigual mide 5 m y la altura correspondiente, 6 m.




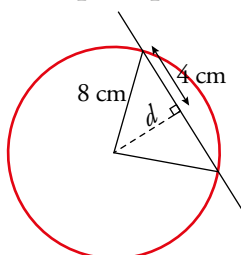
$$l = \sqrt{6^2 + 2,5^2} = 6,5 \text{ m}$$

- 17**  Un pentágono regular de 11,7 cm de lado está inscrito en una circunferencia de 10 cm de radio. Calcula su apotema.




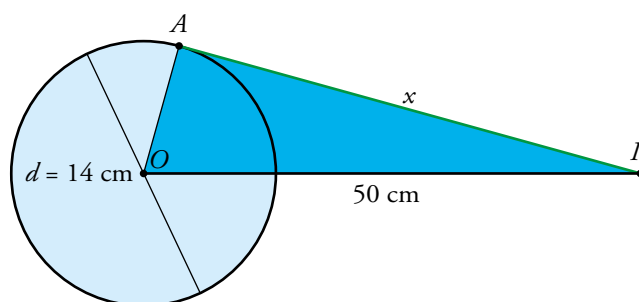
$$ap = \sqrt{10^2 - 5,85^2} = 8,1 \text{ cm}$$

- 18**  ¿A qué distancia del centro de una circunferencia de 8 cm de radio debe pasar una recta para que la cuerda mida 8 cm?




$$d = \sqrt{8^2 - 4^2} = \sqrt{48} = 6,9 \text{ cm}$$

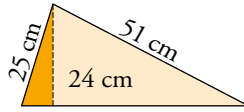
- 19**  Un punto, P , está a 50 cm del centro de una circunferencia de 14 cm de diámetro. ¿Cuánto mide el segmento tangente a la circunferencia, trazado desde P ?



Como la recta es tangente a la circunferencia, tendremos un triángulo rectángulo OAP :

$$50^2 = 7^2 + x^2 \rightarrow x = \sqrt{2451} = 49,5 \text{ cm}$$

- 20**  Halla el perímetro de un triángulo escaleno, sabiendo que dos de sus lados miden 51 cm y 25 cm, y la altura sobre el tercer lado, 24 cm.

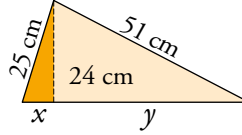



$$x^2 = 25^2 - 24^2 \rightarrow x = \sqrt{49} = 7 \text{ cm}$$

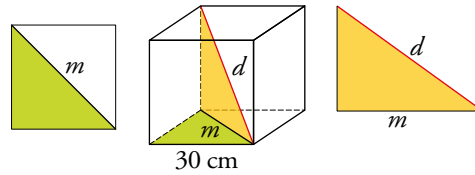
$$y^2 = 51^2 - 24^2 \rightarrow y = \sqrt{2025} = 45 \text{ cm}$$

$$x + y = 7 + 45 = 52 \text{ cm}$$

$$P = 52 + 25 + 51 = 128 \text{ cm}$$



- 21**  Halla la diagonal de un cubo de 30 cm de arista.

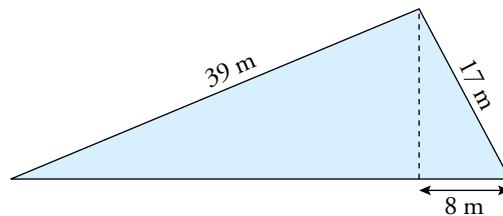


$$m^2 = 30^2 + 30^2 \rightarrow m = \sqrt{1800} = 42,43 \text{ cm}$$

$$d^2 = 30^2 + 42,43^2 \rightarrow d = \sqrt{900 + 1800} = 51,97 \text{ cm}$$

Página 215

- 22**  Clasifica el siguiente triángulo en rectángulo, acutángulo u obtusángulo. Para ello, calcula la medida de alguno de sus elementos.




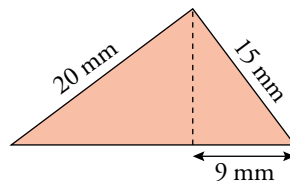
Llamando h a la altura del triángulo y x al trozo de base que falta, tenemos:

$$h = \sqrt{17^2 - 8^2} = 15 \text{ m}$$

$$x = \sqrt{39^2 - 15^2} = 36 \text{ m}$$

$$39^2 + 17^2 = 1810 < 1936 = (36 + 8)^2 \rightarrow \text{Obtusángulo}$$

- 23**  Calcula las medidas que sean necesarias para clasificar el siguiente triángulo según sus ángulos:



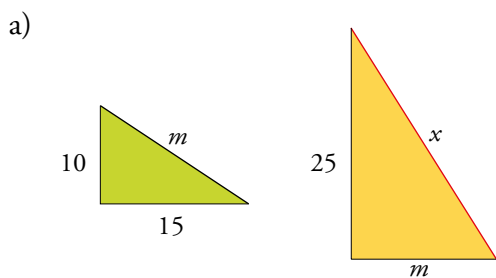
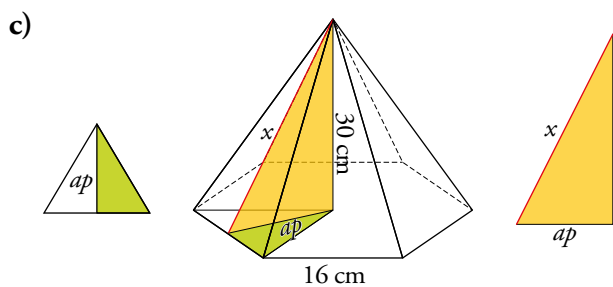
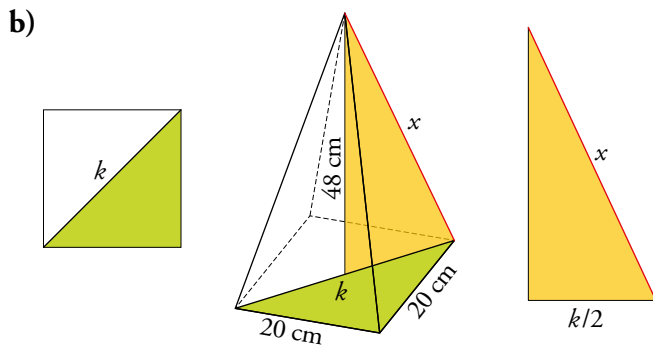
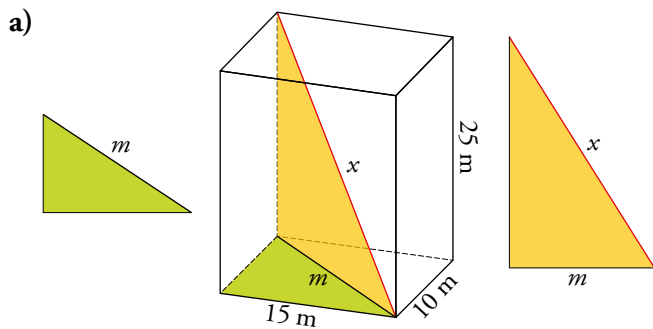
Llamando h a la altura del triángulo y x al trozo de base que falta, tenemos:

$$h = \sqrt{15^2 - 9^2} = 12 \text{ mm}$$

$$x = \sqrt{20^2 - 12^2} = 16 \text{ mm}$$

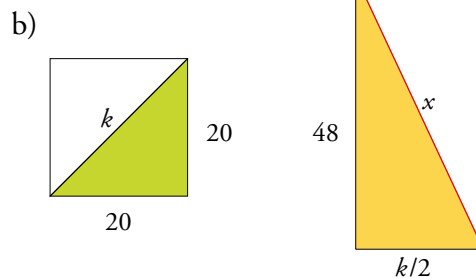
$$20^2 + 15^2 = 625 = (16 + 9)^2 \rightarrow \text{Rectángulo}$$

24  Calcula x en cada caso, aproximando a las décimas.



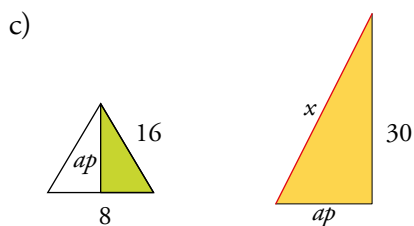
$$m^2 = 10^2 + 15^2 \rightarrow m = \sqrt{325} = 18 \text{ m}$$

$$x^2 = 18^2 + 25^2 \rightarrow x = \sqrt{950} = 30,8 \text{ m}$$




$$k^2 = 20^2 + 20^2 \rightarrow k = \sqrt{800} = 28,3 \text{ cm}$$

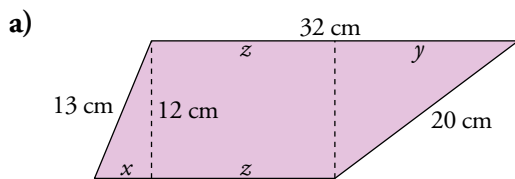
$$x^2 = 48^2 + 14,15^2 \rightarrow x = \sqrt{2504,2} = 50 \text{ cm}$$



$$ap^2 = 16^2 - 8^2 \rightarrow ap = \sqrt{192} = 13,9 \text{ cm}$$

$$x^2 = 30^2 + 13,9^2 \rightarrow x = \sqrt{1092} = 33 \text{ cm}$$

25  Halla el área y el perímetro de estas figuras. Para ello, tendrás que calcular previamente la longitud desconocida de alguno de sus elementos. Si no es exacta, hállala con una cifra decimal.



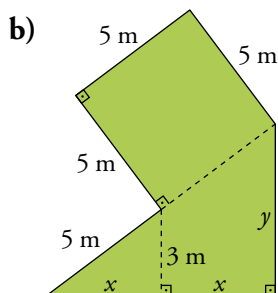
$$x = \sqrt{13^2 - 12^2} = 5 \text{ cm}$$

$$y = \sqrt{20^2 - 12^2} = 16 \text{ cm}$$

$$z = 32 - 16 = 16 \text{ cm}$$

$$P = 32 + 20 + 16 + 5 + 13 = 86 \text{ cm}$$

$$A = \frac{32 + 16}{2} \cdot 12 = 318 \text{ cm}^2$$

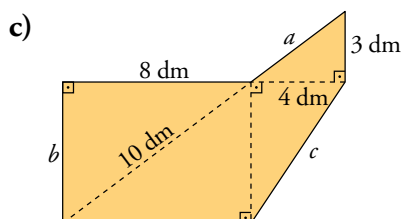


$$x = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4 \text{ m}$$

$$y = \sqrt{10^2 - 8^2} = 6 \text{ m}$$

$$P = 4 \cdot 5 + 8 + 6 = 34 \text{ m}$$

$$A = 5^2 + \frac{8 \cdot 6}{2} = 49 \text{ m}^2$$




$$a = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5 \text{ dm}$$

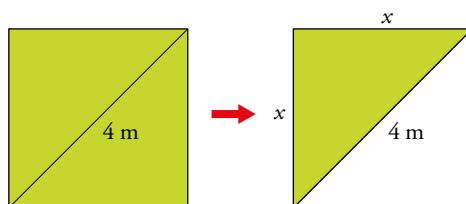
$$b = \sqrt{10^2 - 8^2} = \sqrt{36} = 6 \text{ dm}$$

$$c = \sqrt{6^2 + 4^2} = \sqrt{52} = 7,21 \text{ dm}$$


$$P = 8 + 5 + 3 + 7,21 + 8 + 6 = 37,21 \text{ dm}$$

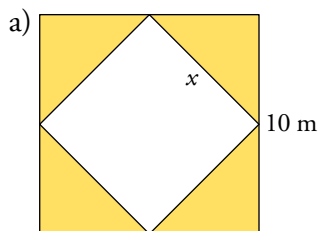
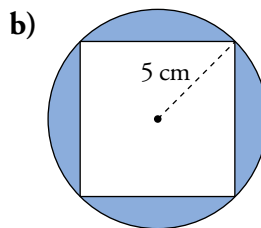
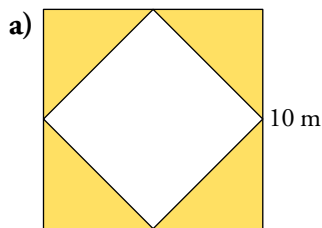
$$A = 6 \cdot 8 + (4 \cdot 6) : 2 + (3 \cdot 4) : 2 = 48 + 12 + 6 = 66 \text{ dm}^2$$

26  La diagonal de un cuadrado mide 4 m y, como sabes, divide al cuadrado en dos triángulos iguales. Calcula el área y el perímetro de uno de esos triángulos.



Ejercicio resuelto.

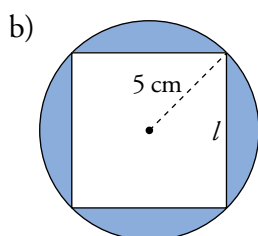
27  Calcula el área y el perímetro de cada una de estas figuras. Observa que el perímetro es la periferia interior y exterior.



$$x^2 = 5^2 + 5^2 = 25 + 25 = 50 \text{ m} \rightarrow x = \sqrt{50} = 7,07 \text{ m}$$

$$P = 10 \cdot 4 + 7,07 \cdot 4 = 68,28 \text{ m}$$

$$A = 100 - x^2 = 100 - 50 = 50 \text{ m}^2$$





$$l^2 + l^2 = 10^2 \rightarrow l^2 = 50 \text{ cm} \rightarrow l = \sqrt{50} = 7,07 \text{ cm}$$

$$P = 2\pi r + 4l = 10\pi + 4l = 59,7 \text{ cm}$$

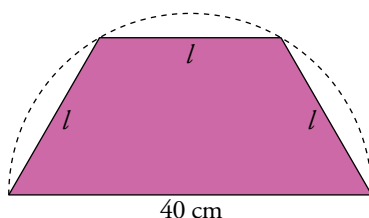
$$A = \pi r^2 - l^2 = 25\pi - 50 = 28,5 \text{ cm}^2$$

Página 216

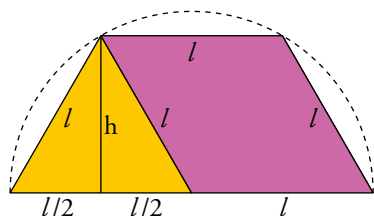
INTERPRETA, DESCRIBE, EXPRÉSATE

28   Explica lo que ha hecho cada uno para resolver el siguiente problema.

Calcula el área de esta figura.



Resolución de Alba



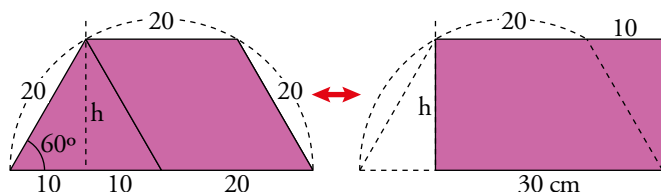
$$l = 40 : 2 = 20 \text{ cm}$$

$$h = \sqrt{20^2 - 10^2} =$$

$$= \sqrt{300} = 17,3 \text{ cm}$$

$$A = \frac{(40 + 20) \cdot 17,3}{2} = 519 \text{ cm}^2$$

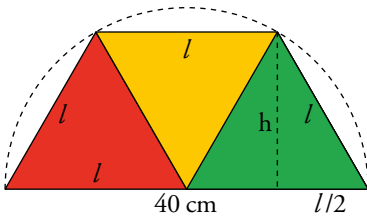
Resolución de Bruno



$$h = \sqrt{400 - 100} = 17,32 \text{ cm}$$

$$A = 30 \cdot 17,32 = 519,6 \text{ cm}^2$$

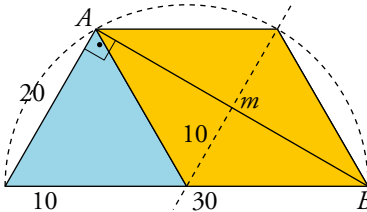
Resolución de Celia



$$h = \sqrt{20^2 - 10^2} = \sqrt{300} = 17,3 \text{ cm}$$

$$A = 3 \cdot \frac{l \cdot h}{2} = 3 \cdot \frac{20 \cdot 17,3}{2} = 519 \text{ cm}^2$$

Resolución de David



$$m^2 = 40^2 - 20^2$$

$$m = \sqrt{1200} = 34,64 \text{ cm}$$

$$A = \frac{34,64 \cdot 20}{2} + \frac{34,64 \cdot 10}{2} = 34,64 \cdot (10 + 5) = 34,64 \cdot 15 = 519,6 \text{ cm}^2$$

Alba ha resuelto el problema buscando el área con la fórmula del trapecio, buscando las medidas de su base mayor, menor y su altura.

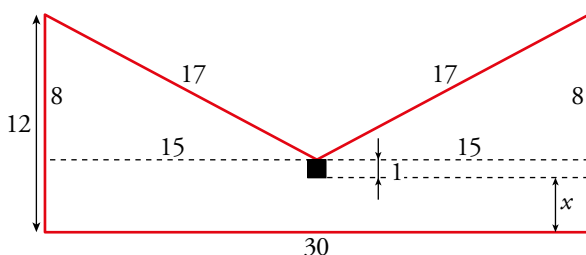
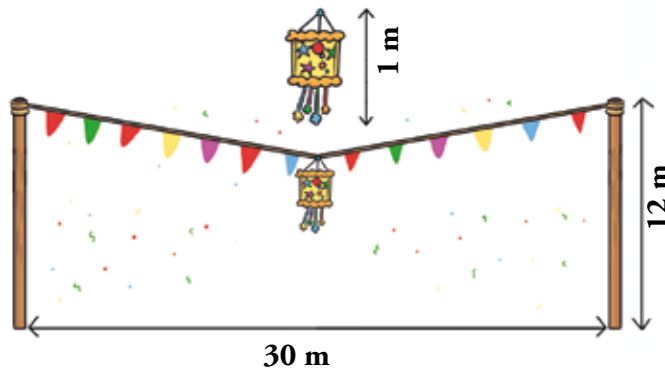
Bruno ha resuelto el problema transformando el trapecio en un rectángulo y calculando su área a partir de la base y la altura.

Celia ha resuelto el problema dividiendo el trapecio en 3 triángulos y sumando sus áreas.

David ha resuelto el problema dividiendo la figura en dos triángulos, uno rectángulo y otro obtusángulo. Ha calculado la base y la altura de cada uno y, con ellas, su área. Finalmente, ha sumado las áreas.

RESUELVE PROBLEMAS SENCILLOS


- 29** En las fiestas de un pueblo, cuelgan una piñata de 1 m de altura en medio de una cuerda de 34 m que está atada a los extremos de dos postes de 12 m separados 30 m entre sí. ¿A qué distancia del suelo queda la piñata?



$$\sqrt{17^2 - 15^2} = 8$$

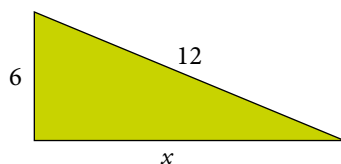
$$x = 12 - 8 - 1 = 3$$

La piñata está a 3 m del suelo.

- 30**  Una torre del tendido eléctrico, de 18 m de altura, cae por una tormenta, doblándose a un tercio de su base, hasta que el extremo superior toca el suelo. ¿A qué distancia de la base toca el suelo?




El trozo de la torre que cae forma un triángulo rectángulo con el suelo y el resto de la torre:

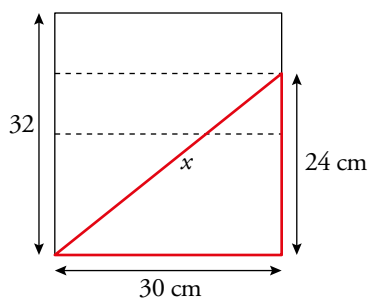
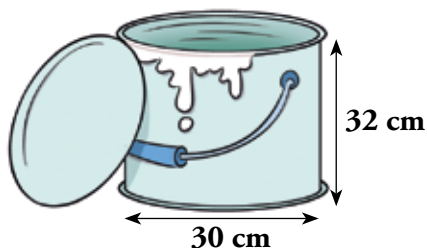


Aplicamos el teorema de Pitágoras:

$$x^2 = 12^2 - 6^2 \rightarrow x = \sqrt{108} = 10,4 \text{ m}$$

Toca el suelo a 10,4 m del centro de la base.

- 31**  Este bote de pintura está lleno en sus tres cuartas partes. En su interior se ha caído un pincel de 40 cm de largo. ¿Crees que el pincel se habrá sumergido completamente en la pintura?

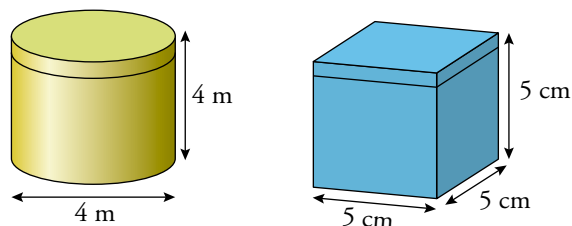


$$\frac{3}{4} \text{ de } 32 = 24$$

$$x = \sqrt{24^2 + 30^2} = 38,4$$

Por tanto, el pincel no se habrá sumergido completamente.

32  Calcula la longitud del mayor listón que cabe en cada una de estas cajas:



En la caja cilíndrica:

$$\sqrt{4^2 + 4^2} = 5,6 \text{ (aproximando a las décimas por truncamiento)}$$

La longitud del mayor listón que cabe es 5,6 m.

En la caja cúbica, la diagonal de la base es:


$$\sqrt{5^2 + 5^2} = 7 \text{ (aproximando a las décimas por truncamiento)}$$

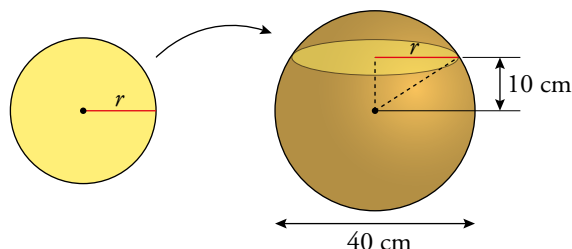
Y la diagonal de la caja es:

$$\sqrt{7^2 + 5^2} = 8,6$$



La longitud del mayor listón que cabe es 8,6 cm.

Página 217

33  Calcula el radio de la circunferencia que se obtiene al cortar una esfera de 40 cm de diámetro por un plano que pasa a 10 cm del centro.



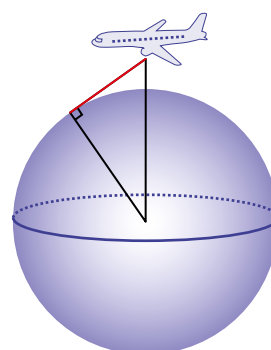
$$r = \sqrt{20^2 - 10^2} = 17,3 \text{ cm (redondeando a las décimas)}$$


34   Si vuelas en un avión a 10 000 m de altura, ¿a qué distancia se encuentra el punto más alejado que puedes ver en el horizonte?

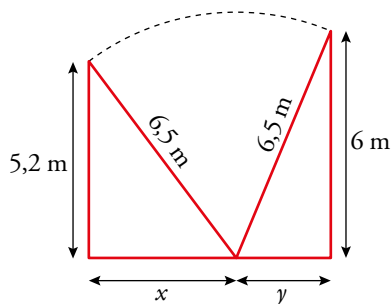
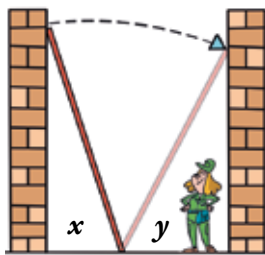
 **Radio de la Tierra: 6 371 km**

$$x = \sqrt{(10 + 6371)^2 + 6371^2} \approx 9017 \text{ km}$$

El punto más alejado se encuentra a 9017 km.



- 35**  Una operaria de la compañía eléctrica apoya su escalera de 6,5 m de largo en la pared de un callejón, a una altura de 6 m. Después de arreglar la avería, sin mover la base de la escalera, apoya esta en la pared de enfrente a una altura de 5,2 m. ¿Cuál es la anchura del callejón?




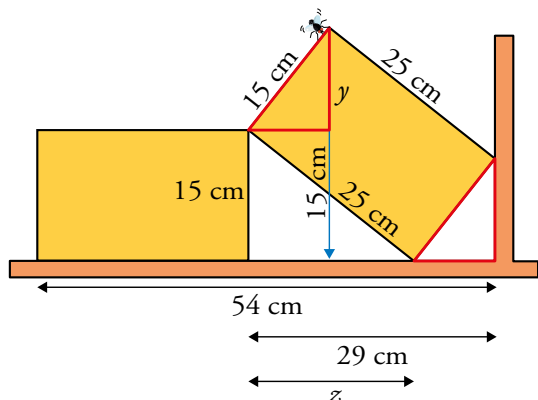
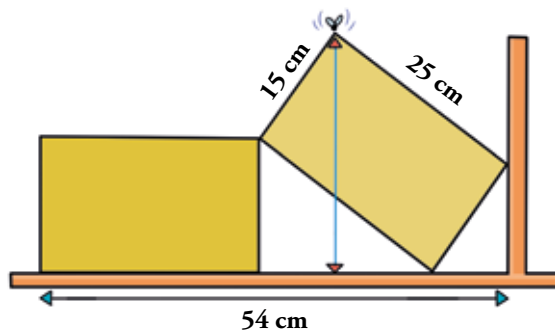
$$x = \sqrt{6,5^2 - 5,2^2} = 3,9$$

$$y = \sqrt{6,5^2 - 6^2} = 2,5$$

$$x + y = 6,4$$

Hay 6,4 m de distancia entre ambas paredes, es decir, la anchura del callejón es de 6,4 m..

- 36**  En la balda de la estantería hay dos cajas idénticas apoyadas una sobre la otra, como ves en la figura. ¿A qué altura, x , se encuentra la mosca que se ha posado en el extremo superior?



$$x = 15 + y$$

$$z = \sqrt{25^2 - 15^2} = \sqrt{625 - 225} = 20 \text{ cm}$$


Como los dos triángulos marcados en rojo son iguales:

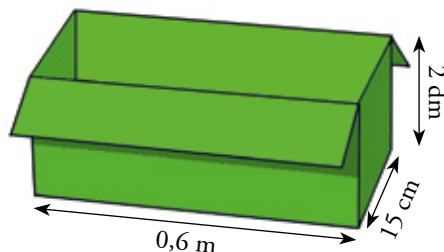
$$29 - z = 29 - 20 = 9 \rightarrow y = \sqrt{15^2 - 9^2} = \sqrt{144} = 12 \text{ cm}$$

$$\text{Por tanto: } x = 15 + y = 15 + 12 = 27 \text{ cm}$$

La mosca se encuentra a una altura de 27 cm.

PARA PENSAR UN POCO MÁS

37  Julián quiere guardar una plancha metálica de 20 cm × 62 cm en una caja como la siguiente. Comprueba si puede hacerlo.



Pasamos todas las medidas de la caja a centímetros y calculamos la diagonal de su base.

Altura caja = 20 cm

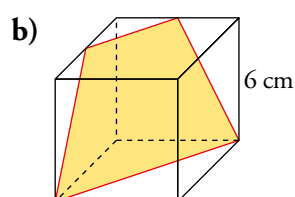
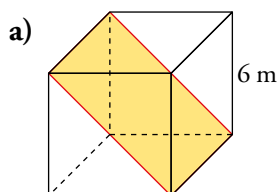
Ancho caja = 60 cm

Profundidad caja = 15 cm

$$d = \sqrt{60^2 + 15^2} = \sqrt{3825} = 61,85 \text{ cm}$$

La plancha metálica no cabe en la caja.

38  Hemos cortado dos cubos de poliespán como se muestra en las siguientes figuras. Halla el área y el perímetro de estos polígonos.



a) RECTÁNGULO:

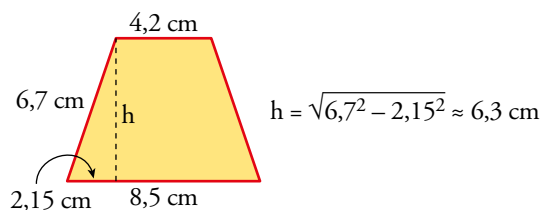
Lado mayor, $L = \sqrt{6^2 + 6^2} = 8,5 \text{ m}$

Lado menor, $l = 6 \text{ m}$

$$A \approx 8,5 \cdot 6 = 51 \text{ m}^2$$

$$P \approx 2 \cdot (6 + 8,5) = 29 \text{ m}$$

b) TRAPECIO:




Base mayor, $B = \sqrt{6^2 + 6^2} \approx 8,5 \text{ cm}$

Base menor, $b = \sqrt{3^2 + 3^2} \approx 4,2 \text{ cm}$

Lado lateral, $l = \sqrt{6^2 + 3^2} \approx 6,7 \text{ cm}$

$$P = 8,5 + 4,2 + 2 \cdot 6,7 = 26,1 \text{ cm}$$

$$A = \frac{8,5 + 4,2}{2} \cdot 6,3 = 40 \text{ cm}^2$$

- 39**  Piensa en una esfera de 12 dm de radio. Si dentro construimos el mayor cubo que sea posible, ¿cuánto medirá la arista de ese cubo?

Aplicamos el teorema de Pitágoras en el triángulo BCE :

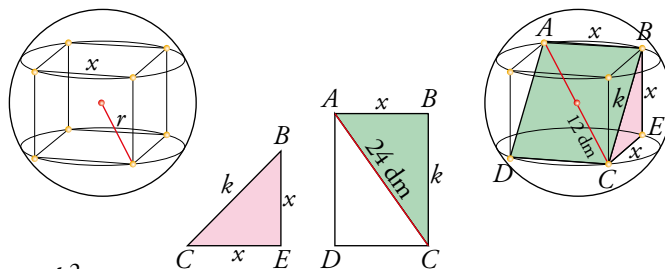
$$k^2 = x^2 + x^2 \rightarrow k^2 = 2x^2$$


Y ahora lo aplicamos en el triángulo ABC y sustituimos k^2 :

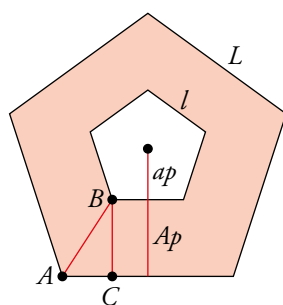
$$24^2 = x^2 + k^2 = x^2 + 2x^2 = 3x^2$$

$$x^2 = \frac{24^2}{3} = 192 \rightarrow x = \sqrt{192} = 13,86$$

La arista del cubo medirá 13,86 dm.



- 40**  El edificio El Pentágono, en Washington (Estados Unidos), es un pentágono regular de 300 m de lado. La apotema de su patio interior, también pentagonal regular, mide 86 m. La longitud del lado del pentágono exterior es 2,4 veces la del interior y la distancia entre los vértices A y B (observa el gráfico) es de 148,51 m. ¿Qué superficie tiene su planta?



Tenemos estos datos:

$$L = 300 \text{ m}$$

$$l = 300 : 2,4 = 125 \text{ m}$$

$$ap = 86 \text{ m}$$

$$\overline{AB} = 148,51 \text{ m}$$

- Calculamos la apotema del pentágono grande:

$$\overline{AC} = \frac{L-l}{2} = \frac{300-125}{2} = 87,5 \text{ m}$$

Aplicamos el teorema de Pitágoras en el triángulo ABC :

$$\overline{BC} = \sqrt{\overline{AB}^2 - \overline{AC}^2} = \sqrt{148,51^2 - 87,5^2} = \sqrt{22055,22 - 7656,25} \approx 120 \text{ m}$$

$$Ap = ap + \overline{BC} = 86 + 120 = 206 \text{ m}$$

- Área del pentágono grande:

$$A_1 = \frac{(300 \cdot 5) \cdot 206}{2} = 154\,500 \text{ m}^2$$

La planta tiene una superficie de 154 500 m².

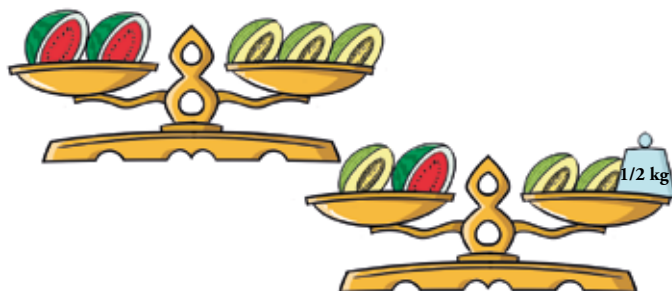
TALLER DE MATEMÁTICAS

Página 218

ÉCHALE INGENIO

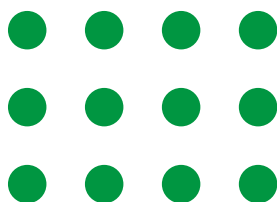
Sin lápiz ni papel, de cabeza

- ¿Cuánto pesa un melón entero?

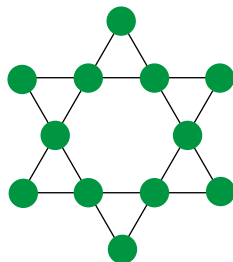


Un melón pesa 1 kg.

- Aquí puedes ver doce fichas colocadas en tres filas de cuatro.



Colócalas ahora de forma que haya seis filas de cuatro.



AUTOEVALUACIÓN

1 Clasifica los siguientes triángulos en rectángulo, acutángulo u obtusángulo.

a) 20 cm, 24 cm, 30 cm

b) 5 m, 6 m, 10 m

c) 10 mm, 24 mm, 26 mm

d) 7 dm, 7 dm, 7 dm

a) $20^2 + 24^2 = 976 > 900 = 30^2 \rightarrow$ Acutángulo

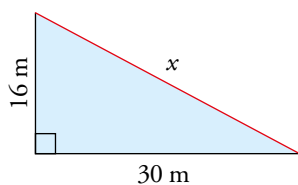
b) $5^2 + 6^2 = 61 < 100 = 10^2 \rightarrow$ Obtusángulo

c) $10^2 + 24^2 = 676 = 26^2 \rightarrow$ Rectángulo

d) $7^2 + 7^2 > 7^2 \rightarrow$ Acutángulo

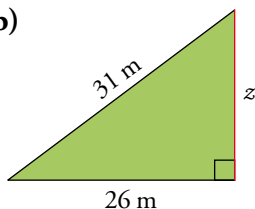
2 Calcula el segmento desconocido en cada una de estas figuras.

a)



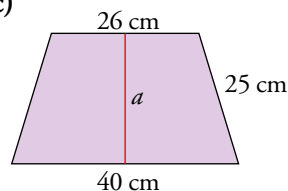
a) $x = \sqrt{16^2 + 30^2} = 34 \text{ m}$

b)



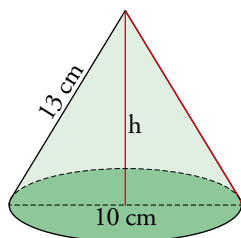
b) $z = \sqrt{31^2 - 26^2} = \sqrt{285} = 16,88 \text{ m}$

c)

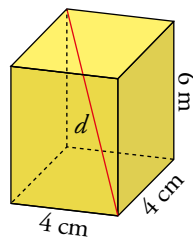


c) $a = \sqrt{25^2 - \left(\frac{40-26}{2}\right)^2} = \sqrt{25^2 - 7^2} = 24 \text{ cm}$

3 Calcula la altura, h , del cono y la diagonal, d , del ortoedro.

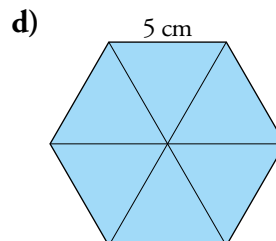
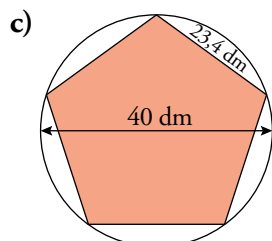
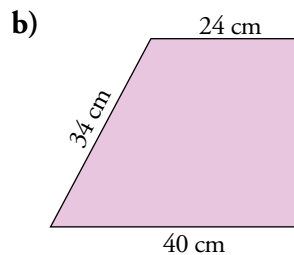
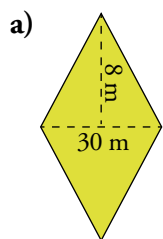


$h = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12 \text{ cm}$



$d = \sqrt{6^2 + 4^2 + 4^2} = \sqrt{68} = 8,25 \text{ cm}$

4 Calcula las áreas y los perímetros de estas figuras.



$$a) A = \frac{(2 \cdot 8) \cdot 30}{2} = 240 \text{ m}^2$$

$$l = \sqrt{15^2 + 8^2} = 17 \text{ m}$$

$$P = 4 \cdot 17 = 68 \text{ m}$$

b) Longitud del lado que falta: $x = \sqrt{34^2 - (40 - 24)^2} = 30 \text{ cm}$

Como es la mitad de un trapezio, calculamos el área del trapezio entero:

$$A = \frac{(48 + 80) \cdot 30}{2} = 1920 \text{ cm}^2$$

$$\text{Área de la mitad del trapezio} \rightarrow 1920 : 2 = 960 \text{ cm}^2$$

$$P = 40 + 34 + 24 + 30 = 128 \text{ cm}$$

c) $ap = \sqrt{20^2 - 11,7^2} = 16,2 \text{ dm}$

$$P = 5 \cdot 23,4 = 117 \text{ dm}$$

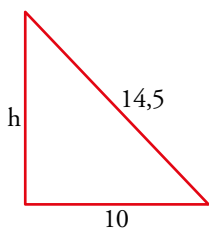
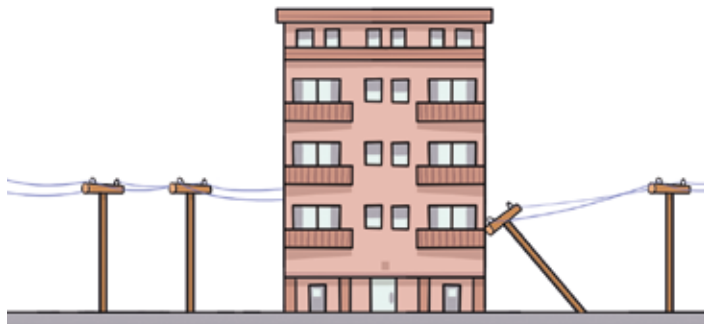
$$A = \frac{117 \cdot 16,2}{2} = 947,7 \text{ dm}^2$$

d) $P = 5 \cdot 6 = 30 \text{ cm}$

$$ap = \sqrt{5^2 - 2,5^2} = 4,3 \text{ cm}$$

$$A = 6 \cdot \frac{5 \cdot 4,3}{2} = 64,5 \text{ cm}^2$$

- 5 Un poste de 14,5 m de alto se quiebra por su base y cae sobre un edificio que se encuentra a 10 m de él. ¿Cuál es la altura a la que golpea?



$$h = \sqrt{14,5^2 - 10^2} = \sqrt{110,25} = 10,5$$

Golpea el edificio a una altura de 10,5 m.

- 6 Averigua si una cucharilla de 14 cm de longitud cabe completamente en un tarro cilíndrico de 4 cm de radio y 12 cm de altura.



Calculamos la diagonal del tarro:

$$d^2 = 8^2 + 12^2 \rightarrow d = \sqrt{208} = 14,42 \text{ cm}$$

La cucharilla cabe completamente dentro del tarro.

- 7 La plaza de un pueblo tiene la forma y las dimensiones que aparecen en el dibujo. Los ángulos señalados son todos ellos de 45° . Calcula el área y el perímetro de la plaza.

$$x = \sqrt{26^2 - 10^2} = 24 \text{ m}$$

$$y = \frac{24 - 12}{2} = 6 \text{ m}$$

$$z = \sqrt{6^2 + 6^2} \approx 8,5 \text{ cm}$$

$$P = 12 + 8,5 \cdot 2 + 4\pi + 26 + 18 \approx 85,6 \text{ m}$$

$$A = \frac{24 + 12}{2} \cdot 6 + 24 \cdot 8 + \frac{24 \cdot 10}{2} + \frac{\pi \cdot 4^2}{2} = 445,1 \text{ m}^2$$

